148 - Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

E un R-ev de dimension n.
Motivation : toute forme bilinéaire s'écrit comme somme d'une fb symétrique et d'une fb antisym

I) Généralités

1) Premières définitions

Déf : forme bilinéaire [Szp 42], fbs [Szp 43], forme quadratique. Isomorphisme entre fq et fbs.

Ex :
différentielle seconde
déterminant sur M2(R)

Prop : formules de polarisation [Szp 70] *(les formules de polarisation sont différentes pour les formes sesquilinéaires et les formes hermitiennes)*

Prop : écriture en somme, matrice associée en DF. On a un isomorphisme entre les matrices symétriques réelles et les formes quadratiques sur R^n. Ecriture de q(X)=tXAX [Szp 45].

Rq : une forme quadratique est exactement un polynôme homogène de degré 2.

Cor : la dimension de l'espace vectoriel des fq sur R^n est n(n+1)/2.

Déf : le noyau d'une forme quadratique est l'ensemble {x dans R^n tq pour tout y, b(x,y)=0}.

Déf : q est dite non dégénérée si son noyau est trivial.

Déf : rang : c'est le rang de l'appl x->b(x,.). C'est aussi le rang de n'importe quelle matrice la représentant.

Prop : b non dégénérée ssi rg(b)=n.

2) Orthogonalité [Szp 54 à 58]

Déf : on dit que x et y sont orthogonaux si b(x,y)=0. Si A est une partie de E, on définit $A^{\perp}$ l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A.

Prop : $A^{\perp}$ est un sev, propriétés d'inclusion etc

Prop : si b est non dégénérée, dim$A^{\perp}$+dimA=n *(quotients d'espaces vectoriels…)*

3) Isotropie [Szp 60 à 62]

Déf : un vecteur isotrope est un vecteur x ts q(x)=0. L'ensemble de ces vecteurs s'appelle le cône, c'est un cône.

Déf : une forme quadratique est dite définie si son cône isotrope est trivial, positive si pour toux x, q(x)≥0, définie positive si pour tout x non nul, q(x)>0. Une fq dp est appelée produit scalaire, et (E,q) est appelé espace euclidien.

Prop : le noyau est inclus dans le cône d'isotropie, mais l'inverse n'est pas toujours vrai.

Déf : un espace H est dit isotrope s'il existe x dans H tq x soit dans l'orthogonal de H, et totalement isotrope si tous les vecteurs de H sont isotropes. L'indice de q est le maximum des dimensions des espaces totalement isotropes.

Prop : H tot isotrope ssi H inclus dans $H^{\perp}$.

Remarque : une fq peut être non dégénérée et avoir des espaces isotropes. Ex : [0,1 ;1,0].

Prop : H non isotrope. Alors H+$H^{\perp}$=E *(la restriction b' de b à HxH est non dégénérée donc x->b'(x,.) est un isomorphisme de H dans H*. b'(x,.) est une forme linéaire donc il existe un unique y_0 tq pour tout b'(x,y)=b(x,y_0)(=b(x,y)). Donc b(x,y-y_0)=0. Y-y_0 est ds $H^{\perp}$. Y=(y-y_0)+y_0 décomp unique OK)*

II) Réduction et classification des formes quadratiques

1) Bases de R^n

Th : il existe une base orthogonale pour q [Szp 67] *(on suppose d'abord que q n'est pas dégénérée, on prend un vecteur v_1 tq q(v_1) non nuln Vect(v_1) est non isotrope donc E=Vect(v_1)+suppl, on conclut par récurrence. Dans le cas où q est dégénérée, on écrit E comme somme du noyau et d'un suppl, et on utilise le premier cas pour réduire sur le suppl, puis toutes base de Ker(q) est une base orthogonale du noyau, on recolle)*

Th (Gram Schmidt) : si q est définie positive, il existe une base orthonormale de E.

2) Décomposition en carrés [Szp 72 à 75]

D'après ce qui précède, toute forme quadratique admet une base orthogonale. Dans une telle base, q s'écrit q(x)=sum(a_i*x_i²), ce qui donne q=sum(a_i*(e_i*)²) : q s'écrit comme une somme de carrés de formes linéaires indépendantes, et sa matrice représentative est diagonale. Nous allons voir une méthode effective pour trouver une telle décomposition : la méthode de Gauss.

Th : méthode de Gauss pour écrire une fq comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes.
q une fq sur E.
- Si dimE=1, $q(x) = a_{11}x_1^2$ donc $q = a_{11}(e_1^*)^2$.
- dimE=n.
  - 1^er cas : il existe i tq $a_{ii} \neq 0$. Par exemple i=1

$$q(x) = a_{11}x_1^2 + x_1L(x_2, \dots, x_n) + q'(x_2, \dots, x_n) = a_{11}\left(x_1 + \frac{1}{2a_{11}}L(x_2, \dots, x_n)\right)^2 + q'(x_2, \dots, x_n) - \frac{1}{4a_{11}^2}L(x_2, \dots, x_n)^2$$

A gauche on a une forme linéaire au carré, et à droite une forme quadratique sur un espace de dim n-1, reste à vérifier qu'elles sont indépendantes *(écrire les matrices)*
  - 2^e cas : pas de i tq $a_{ii} \neq 0$. Q non nulle donc par exemple $a_{12} \neq 0$.

$$\begin{aligned} q(x) &= 2a_{12}x_1x_2 + x_1L_1(x_3, \dots, x_n) + x_2L_2(x_3, \dots, x_n) + q'(x_3, \dots, x_n) \\ &= 2a_{12}\left(x_1 + \frac{1}{2a_{12}}L_1(x_3, \dots, x_n)\right)\left(x_2 + \frac{1}{2a_{12}}L_2(x_3, \dots, x_n)\right) + q'(x_2, \dots, x_n) - \frac{1}{4a_{12}^2}L_1(x_3, \dots, x_n)L_2(x_3, \dots, x_n) \end{aligned}$$

On se sert de l'identité ab=1/4((a+b)²-(a-b)²) pour la partie de gauche et c'est bon.

Exemple : q(x,y,z)=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2

Rq : cette décomposition n'est pas unique, suivant le choix des a_ii non nuls qu'on fait.

Th : (loi d'inertie de Sylvester) Soit q une forme quadratique de rang r. Alors il existe un unique couple d'entiers (p,q) appelé signature de q tq dans toute base où la matrice de q est diagonale, la matrice a exactement p coefficients strictement positifs et q strict négatifs *(la démonstration nécessite la classification des fq à suivre)*

3) Classification des formes quadratiques réelles

Déf : deux fq q et q' sont dites équivalentes s'il existe u dans GL(E) tq q=q'ou. Ceci est équivalent à dire qu'il existe P dans GL(E) tq A_q=tPA_q'P (ie que A_q et A_q' sont congrues).

Rq : deux fq sont équivalentes si elles sont dans la même orbite pour l'action de GLn(R) sur Sn(R) par congruence.

Th : q et q' sont équivalentes ssi elles ont même rang et même signature. Dans ce cas, un représentant de l'orbite est la matrice (I_p,-I_q,0).

Cor : il y a r+1 classes d'équivalences de fq de rang r (donc en tout 1+2+3+…+n+1=(n+1)(n+2)/2 classes d'équivalence.

Cor : il existe une base orthonormale ssi q est définie positive.

Cor : si q est non dégénérée, son indice est min(p,q) *(on peut mq que ds le cas général, la dimension d'un espace tot isotrope est plus petite que n/2 car dim$A^{\perp}$+dimA=n, et A est inclus dans $A^{\perp}$. (e_1,…,e_q,….,e_n) base adaptée à la décomposition def pos/def neg, E_+, E_-. Q est définie négative sur E_- donc l'intersection de E- avec tout espace tot isotrope est {0}. Donc la dimension max d'un esp isotrope est plus petite que n-max(p,q)=min(p,q)=p par ex. Regardons now H=Vect(e_i+e_s+i, i dans [1,p]} (possible car 2p<n). On vérifie que H est tot isotrope)*

Prop : calcul de la signature : suite des mineurs de Sylvester [Methodix]

Autre méthode : si on diagonalise la matrice en base orthonormée (on sait que c'est possible car elle est symétrique), comme la matrice de passage est orthogonale, la matrice de départ est congrue à la matrice diagonale et on lit le signe des vp.

4) Réduction des formes quadratiques

Th : (E,q) un espace euclidien. Tout endomorphisme autoadjoint est diagonalisable en base orthonormée [Gou 244]

Cor : S une matrice symétrique. Alors il existe P dans O(n,R) tq S=PDP^-1.

Th : (E,q) un espace euclidien (q dp), q' une fq qcq. Alors il existe une base de E qui est à la fois orthonormale pour q et orthonormée pour q' [Szp 78]

Cor : S symétrique. Il existe P tq tPP=Id et S=tPDP (csq du théorème spectral)

III) Groupe orthogonal

Ici Q sera une fq **non dégénérée** (p+q=n).

1) Générateurs

Déf : soit Q une forme quadratique, et O(Q)={u dans GL(E) tq q(u(x))=q(x)} l'ensemble des isométries. Si on note A la matrice représentative de Q dans une base, P est dans O(q) ssi tPAP=A, donc ssi P est dans le stabilisateur de A pour l'action de congruence. Or si Q est de signature O(p,q), A est dans l'orbite de Ip,q, donc O(Q) est conjugué à Stab(Ip,q) qu'on note O(p,q).

Déf : une symétrie orthogonale est un élément de GL(E) vérifiant s²=Id et appartenant à O(Q). Une réflexion orthogonale est une symétrie orthogonale fixant un hyperplan.

Th : (Cartan-Dieudonné) Tout élément de O(q) s'écrit comme produit d'au plus n réflexions orthogonales [Szp 316]

2) Le groupe orthogonal O(n)

Th : O(n) est compact *(rayon spectral pour borné)*

Th : O(n) a deux composantes connexes, dont l'une est SO(n) *(montrer que SO(n) est connexe puis grâce au déterminant, montrer que O(n) est réunion disjointe de SO(n) et hSO(n), donc au plus deux comp connexes)*

3) Le groupe O(p,q) [DSerre] + [MT]

Th : soit G un sous groupe de GLn(C) stable par M->M* et tq pour tout élément de G∩Hn++, sqrt(M) reste dans G. Alors G est homéo à *(G)*∩ *U*(n))x(G∩Hn++) [DSerr 81] *(M dans G, décomp polaire M=UH. M* dans G donc MM*=H² dans G. Donc H est dans G, donc U aussi)*

Th : c'est le cas de O(p,q) et U(p,q).

Csq : $O(p,q)$ est homéo à $(O(p,q)\cap O(n))\times(O(p,q)\cap S_n)$ homéo à $O(p)\times O(q)\times R^{pq}$;
$U(p,q)$ est homéo à $(U(p,q)\cap OU(n))\times(U(p,q)\cap H_n)$ homéo à $U(p)\times U(q)\times R^{pq}$ [DSerr 82]

Th : $O(p,q)$ a 4 composantes connexes ; les détailler [MT 107] + [DSerr 85]

4) Sous groupes compacts de $GL_n(R)$

Théorème [Alessandri]

IV) Applications

1) Compter les racines de polynômes [Gant2 199]

Formes de Hankel

2) En géométrie [Aud] + [RW L2]

a) Coniques [Aud]

Déf : $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension 2, E l'ev associé. On appelle conique affine la classe d'équivalence d'un polynôme du second degré $f : \mathcal{E} \to R$ sous la relation « $f\sim g$ ssi f et g sont proportionnels ». Une conique est donc un polynôme du type $f(M)=q(OM)+L_O(OM)+c$ où q est une forme quadratique, L une forme linéaire, c une constante [Aud 223]

Rq : l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ vérifiant l'équation s'appelle « image de la conique ». Audin explique bien pourquoi on ne définit pas la conique comme l'image.

Déf : Soit $f(M)=q(OM)+L(OM)+c$ une conique. On définit la conique homogénéisée $Q(u,z)=q(u)+L(u)z+cz^2$. La conique définie par f est dite propre si Q est non dégénérée [Aud 223] *(mettre des flèches de vecteurs. Dire que que q ne dépend pas de l'origine mais que L si)*

Ex : $f(x,y)=x^2-y$ est dégénérée (car $q(x,y)=x^2$ l'est) mais $Q(x,y)=x^2-yz$ ne l'est pas donc f est propre.

Rq : on vérifie que changer d'origine ne change pas la dégénérescence d'une fq.

Déf : on dit qu'un point A est un centre pour la quadrique si $f(M)=q(AM)+c$, çad $L_A=0$ [Aud 227]

Th : une quadrique est à centre ssi q est non dégénérée [Aud 227]

Th : à isométrie près, une conique du plan affine est de la forme… [Aud 228 + 231] *(pour ça on munit le plan d'une structure euclidienne (une fq non dégénérée) puis on utilise le th de réduction simultanée pour trouver une base on pour q et og pour la conique)*

Th : à transformation affine près, une conique du plan affine est de la forme… [Aud 232]

b) Quadriques de R^3 [RW L2 p.461 à 470]

Déf : $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension 3, E l'ev associé. On appelle quadrique affine la classe d'équivalence d'un polynôme du second degré $f : \mathcal{E} \to R$ sous la relation « $f\sim g$ ssi f et g sont proportionnels ». Une quadrique est donc un polynôme du type $f(M)=q(OM)+L_O(OM)+c$ où q est une forme quadratique, L une forme linéaire, c une

Rq : l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ vérifiant l'équation s'appelle « image de la quadrique ». Audin explique bien pourquoi on ne définit pas la quadrique comme l'image.

Déf : on dit qu'un point A est un centre pour la quadrique si $f(M)=q(AM)+c$, çad $L_A=0$

Th : une quadrique est à centre ssi q est non dégénérée

Th : (classification des quadriques)
On réduit la partie quadratique pour obtenir a_1x_1²+a_2x_2²+a_3x_3²+c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+b.

- 1er cas : on suppose que q n'est pas dégénérée. L'équation devient a_1x_1²+a_2x_2²+a_3x_3²+b', a_i non nuls. On raisonne sur la signature et le signe de b'.
- 2e cas : on supp que le rang est 2, ce qui amène à a_1x_1²+a_2x_2²+c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+b. Là on fait un changement de repère en posant X=x-d, Y=y-e et on arrive à a_1X_1²+a_2X_2²+c_3x_3+b'=0. Si c_3=0, on peut conclure sur les différents cas. Sinon, on fait un chgt de repère en x_3 pour virer le b' et on conclut.
- 3e cas : de rang 1, pénible.

3) <u>En calcul différentiel</u> [Rou] + [Gou]

Prop : U un ouvert de R^n. Soit f une application de U dans R une fonction de classe C^2. La différentielle de f en x est une forme linéaire df _x:R^n->R, h->df_x(h). La différentielle seconde de f en x est une forme bilinéaire $d^2f(x): R^n \to R$ définie par $d^2f(x)(h,k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i k_j$. On note Q la forme quadratique associée [Gou 316]

Th : (Taylor Young reste integral ordre 2) [Rou 298]

Th : si f admet un minimum (un max) en x alors Q est une fq positive (resp negative)
Si Q est une forme dp (resp dn), f admet un minimum (resp un max) en x [Gou 316] *(csq de Taylor Young)*

Prop : si une matrice symétrique S est pas trop loin d'une matrice symétrique non dégénérée S0 alors elle lui est congrue et la matrice de congruence dépend de manière C1 de S0

Appl : l'ensemble des fq de signature (p,q) est un ouvert dans Sn

Th : lemme de Morse

Cor : ces points critiques de f sont isolés (f n'a pas d'autre point critique au voisinage de x).

Cor : position d'une surface par rapport à son plan tangent.

<u>Développements :</u>
Forme de Hankel [Gantmacher – Théorie des matrices - Tome 2 199] (***)
Lemme de Morse [Rou 209 + 354] (**)
Sous groupes compacts de GLn(R) [Aless 141] (**)
SETIM

<u>Rapport du jury :</u>
2009 : la preuve de la loi d'inertie de Sylvester doit être connue et le candidat doit avoir compris la signification géométrique de ces deux entiers composant la signature d'une forme quadratique réelle. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante.

<u>Commentaires :</u>
Virer les premières déf ?
Th de Witt ?
Seconde forme fondamentale ?

<u>Bibliographie :</u>
[Szp] Szpirglas – Mathématiques L3 Algèbre
[MT] Mneimné Testard
[DSerr] Les matrices
[Gant2] Gantmacher – Théorie des matrices volume 2
[Rou] Rouvière
[RW L2] Ramis & Warusfel L2
[Gou] Gourdon – Analyse
[Gou] Gourdon - Algèbre

[Aud] Géométrie
[Mig] Mignotte – Mathématiques pour le calcul formel
[Alessandri] Thèmes de Géométrie
[Methodix] Algèbre